

Stochastik

1	2	3	4	Σ
3.5	4	3	4	14.5/6

Hallo,

Wir sind in verschiedenen Tutorien, wollen aber zusammen abgeben. Da wir zunächst auf eure (deine und Peters) Antwort warten wollen, haben wir Herrn Behrends noch nicht diesbezüglich fragen können. Sollte er das unerwarteterweise ablehnen, müssen wir das anders regeln.

Die Zettel landen nur bei dir im Fach, weil Peters Tutorium später ist. (Sonst habe ich im Tutorium keinen Zettel)

Grüß

Alex + Matthias
4284774 4282340

- ① Periodizität: • a_0, a_1, m fest ~~$\mathbb{Z}$~~
 $\Rightarrow h_{k+1}$ hängt nur von h_k ab
und $h_{k+m} = h_k \Rightarrow h_{k+1} = h_{k+1+m}$
• Da der Wert ~~von~~ mod m gerechnet wird
 $\Rightarrow h_k \in \{0, 1, \dots, m-1\}, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
Es können also nur m verschiedene Werte
angenommen werden.
 $\Rightarrow$ nach spätestens m Schritten muss für
ein $k \in \mathbb{N}$ ^(und $h_k \leq m$) $h_k = h_{k+m}$ sein. Da h_{k+1} nur von h_k
abhängt wiederholen sich dann alle

Anmer. Schranke wird z. B. bei $a_0 = 1, a_1 = 1$ erreicht

~~(z. B.:~~ $h_0 = 0, m = 5 \Rightarrow h_1 = 1, h_2 = 2, h_3 = 3, h_4 = 4, h_5 = 0, \dots)$
Was ist denn nun die Schranke?
3.5/4

- ③ ~~$\mathbb{Q}$~~ $\square := \{\text{Menge aller Punkte in dem offenen Rechteck}\}$

Ich ~~B.B.A.~~ zeige ~~ich~~ das für ein allgemeines Rechteck,
da es mir für ~~überabzählbar~~ vielen zu viel
Schreibarbeit ist.

$\square$ ist offen in $\mathbb{R}^2$, also folgt $\forall x \in \square \exists \varepsilon > 0$:
 $B_\varepsilon(x) \subset \square$ (aut Definition von offen, wobei
 $B_\varepsilon(x)$ im $\mathbb{R}^2$ eine offene Kreisscheibe ist.
Endliche Vereinigungen von Kreisscheiben sind
wieder in ε (σ -Algebra-Eigenschaft iii)).
Betrachte $\mathbb{Q}^2 \cap \square$. $\mathbb{Q}^2$ abzählbar
 $\Rightarrow \mathbb{Q}^2 \cap \square$ abzählbar

$$\Rightarrow \bigcup_{x \in \mathbb{Q}^2} B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{E}$$

wobei $\varepsilon = \varepsilon(x)$ so zu wählen ist, dass $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{E}$

das reicht nicht

Behauptung: $\bigcup_{x \in \mathbb{Q}^2} B_\varepsilon(x) = \mathbb{E}$

" $\subset$ " klar

aber bei uns ist $\varepsilon = \varepsilon(x)$!

Beweis: $\mathbb{Q}^2$ dicht in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}^2 \exists y \in \mathbb{Q}^2$:

("2")

Min!

~~$B_\varepsilon(x) \subset B_\varepsilon(y)$~~

$\Rightarrow$ Alle Punkte in $\mathbb{E}$ sind in

irgend einer Kreisscheibe um p_i

(vgl. Tutorium)

$p_i \in \mathbb{Q}^2$

□

3/4

2) Für die Gegenbsp. verwendet:

$$\Omega = \{0, 1, 2\} \quad \mathcal{E}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{0, 2\}, \{1\}\}$$
$$\mathcal{E}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{0, 1\}, \{2\}\}$$

a) (Gegenbsp.)

$$\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1\}, \{2\}\}$$

$$\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \text{ ist nicht enthalten}$$

$\Rightarrow$ Bedingung (iii) nicht erfüllt

b) (i) Ω enthalten, da $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ σ -Algebren sind

$$(ii) E \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow E \in \mathcal{E}_1 \wedge E \in \mathcal{E}_2$$

Also auch (weil σ -Algebren)

$$(\Omega \setminus E) \in \mathcal{E}_1 \wedge (\Omega \setminus E) \in \mathcal{E}_2$$

Und daher

$$(\Omega \setminus E) \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$$

(iii) Wähle $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ beliebig. Wegen

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \in \mathcal{E}_1 \text{ und } E_1 \cup E_2 \cup \dots \in \mathcal{E}_2$$

gilt auch $E_1 \cup E_2 \cup \dots \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$.

c) (Gegenbsp.)

Erzeuge zunächst $\mathcal{E}_3$ nach Vorschritt aus $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ (s.o.):

$$\mathcal{E}_3 = \{\emptyset, \Omega, \{0, 1\}, \{2\}, \{0, 2\}, \{0\}, \{1\}\}$$

$$\{0\} = \underbrace{\{0, 2\}}_{\mathcal{E}_1} \cap \underbrace{\{0, 1\}}_{\mathcal{E}_2}$$

$$\Omega \setminus \{0\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{E}_3$$

$\Rightarrow$ Bed. (ii) nicht erfüllt

$$4) \Omega = \{0, 1, 2\}$$

$$\mathcal{E}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\mathcal{E}_3 = \{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{1, 2\}\}$$

$$\mathcal{E}_4 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{0, 2\}\}$$

$$\mathcal{E}_5 = \{\emptyset, \Omega, \{2\}, \{0, 1\}\}$$

Dass es keine weiteren σ -Algebren geben kann, wird schnell klar. Der einzige noch ~~mögliche~~ denkbare Fall wäre eine, die zwei einelementige Mengen enthält, z.B. $\{0\}, \{1\}$. Dann wären wg. Bed. (ii) auch $\{1, 2\}$ und $\{0, 2\}$ enthalten und wg. (iii) auch $\{0, 1\}$. Wiederum wg. (ii) wäre dann aber auch $\{2\}$ ein Element und mit $\emptyset, \Omega$ ergäbe das nur erneut die Potenzmenge.

4/4